



### Clasa a XI-a, Soluții și barem

**Problema 1.** Considerăm șirul de numere reale  $(x_n)_{n \geq 1}$  definit recurent prin  $x_1 = 1$  și  $x_{n+1} = x_n + \frac{n^2}{x_n}$  pentru  $n \geq 1$ . Arătați că, pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sqrt{n^3} \leq \sqrt{\frac{3}{2}} x_{n+1} \leq \sqrt{(n+2)^3}.$$

G. René

*Soluție și barem.* Avem evident  $x_{n+1}^2 = x_n^2 + 2n^2 + \frac{n^4}{x_n^2} > x_n^2 + 2n^2$ . De aici rezultă  $x_{n+1}^2 > \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} > \frac{2}{3}n^3$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ..... **9p**

Din relația de recurență deducem apoi că  $x_{n+1}^2 < x_n^2 + 2n^2 + \frac{3n}{2}$  ..... **6p**

Rămâne de verificat  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{3n(n+1)}{4} \leq \frac{2}{3} \cdot (n+2)^3$  ..... **6p**

**Problema 2.** Fie  $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  astfel încât  $AB - BA = A$ . Arătați că  $A^3 = O_3$ .

\*\*\*

*Soluție și barem.* Prin inducție, deducem  $A^n B - BA^n = nA^n$  ..... **6p**

De aici rezultă că  $\text{tr}(A^n) = 0$  pentru orice  $n \geq 1$ . ..... **6p**

Teorema Hamilton-Cayley implică  $A^3 - \text{tr}(A)A^2 + aA - \det(A)I_3 = O_3$ , unde  $a = \frac{1}{2}(\text{tr}(A)^2 - \text{tr}(A^2)) = 0$ , deci  $A^3 = \det(A)I_3$  și, cum  $\text{tr}(A^3) = 0$ , deducem  $A^3 = O_3$ . ..... **9p**

**Problema 3.** Fie  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă cu proprietatea că  $f(x^n) \geq f(x)$ , oricare ar fi  $x \in [1, \infty)$  și  $n \in \mathbb{N}$ . Arătați că  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  există.

\*\*\*

*Soluție și barem.* Fie  $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(e^x)$ . Atunci  $g$  este continuă pe  $[0, \infty)$  și  $g(nx) \geq g(x)$  pe domeniu. E suficient să arătăm că limita lui  $g$  la infinit există ..... **3p**

Presupunem că nu ar fi așa. Există atunci două șiruri cu limita infinit,  $(x_k)_k$ ,  $(y_k)_k$  și  $L > l$ , astfel ca  $\lim g(x_k) = L$ ,  $\lim g(y_k) = l$ . ..... **3p**

Așadar există  $a \in [0, \infty)$  și  $l' > l$  cu  $g(a) > l'$ , deci, din continuitate, un interval  $[a, b]$ , neredus la un punct, cu  $g(x) > l'$  pentru  $x \in [a, b]$  ..... **3p**

Căutăm  $n_0 \in \mathbb{N}$  astfel încât reuniunea intervalelor  $[na, nb]$ ,  $n \geq n_0$  să fie intervalul  $[an_0, \infty)$ . Pentru aceasta, este suficient ca  $(n+1)a \leq nb$  pentru  $n \geq n_0$ , adică  $n \geq \frac{a}{b-a}$ . Astfel, putem lua  $n_0 = [a/(b-a)] + 1$  ..... **6p**

Reiese că pentru orice  $x \in [an_0, \infty)$  există  $n \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $x \in [na, nb]$ , deci  $g(x) \geq g(x/n) > l'$ , în contradicție cu existența șirului  $(x_k)_k$  ..... **6p**

*Observație.* Din ipoteză nu reiese că funcția este monotonă. Un exemplu în acest sens este  $f(x) = \frac{\cos x - 4}{x + 1}$ .

**Problema 4.** Fie  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ . Notăm cu  $d(A)$  cel mai mare divizor comun al elementelor matricei  $A$ . Arătați că, dacă  $d(A) = d(A^2) = d(A^3) = 1$ , atunci  $d(A^k) = 1$  pentru orice  $k \geq 1$ .

Cristi Săvescu

*Soluție și barem.* Nu putem avea  $d(A^k) = 0$  pentru vreun  $k \in \mathbb{N}$ , căci atunci, din Hamilton-Cayley, am avea  $A^3 = O_3 \dots \dots \dots$  **3p**

Din teorema Hamilton-Cayley, există  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  astfel încât  $A^3 + aA^2 + bA + cI_3 = O_3 \dots \dots \dots$  **3p**

Pentru  $k \geq 2$ , înmulțind relația cu  $A^{k-1}$  obținem  $A^{k+2} + aA^{k+1} + bA^k + cA^{k-1} = O_3 \dots \dots \dots$  **3p**

Fie, prin absurd,  $k > 3$  cel mai mic natural cu  $p = d(A^k) > 1$ . Pentru  $r \geq k$  avem  $A^r = A^k \cdot A^{r-k} = pB$ ,  $B \in M_3(\mathbb{Z})$ , deci matricele  $A^{k+2}, A^{k+1}, A^k$  au toate elementele divizibile cu  $p$ . Rezultă că  $c$  e divizibil cu  $p \dots \dots \dots$  **6p**

Se arată pe rând, în același mod, că  $a, b$  sunt divizibile cu  $p$ , deci  $A^3 = pD$  cu  $D \in M_3(\mathbb{Z})$ , adică  $d(A^3) \geq p > 1$ , contradicție.  $\dots \dots \dots$  **6p**